8° BORSA DI STUDIO "RICCARDO ROSSI"
Traccia di correzione

Maschera dei risultati per le domande a risposta chiusa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
D	C	B	A	C	B	C	C	D	B	A	A	C	B	D	E	C	E

Risultati problemi numerici:

19) **125**

20) **36**

Spiegazione delle risposte di Matematica e Fisica:

1) Il valore dell'espressione $\left(\operatorname{sen}60° + \operatorname{tg}45°\right)^2 \cdot \frac{\left(\cos 30° - \operatorname{tg}225°\right)^2}{\operatorname{sen}^2 210°}$ è :

a) 1 b) 2 c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) 0

Risp. D

In base ai valori notevoli delle funzioni goniometriche:

$$\left(\operatorname{sen}60° + \operatorname{tg}45°\right)^2 \cdot \frac{\left(\cos 30° - \operatorname{tg}225°\right)^2}{\operatorname{sen}^2 210°} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{3}{4}-1\right)^2 \cdot 4 = \frac{1}{16}\cdot 4 = \frac{1}{4}$$

2) Il valore dell'espressione $e^{\ln\left(\log_3 27^{\log_7 49}\cdot \log_2 8^{\log_6 36}\right)^{\log_5 5}}$ è:

a) non calcolabile b) 1 c) 36 d) 81 e) 9

Risp. C

In base alla definizione ed alle proprietà dei logaritmi:

$$e^{\ln\left(\log_3 27^{\log_7 49}\cdot \log_2 8^{\log_6 36}\right)^{\log_5 5}} = \left(\log_3 27^{\log_7 49}\cdot \log_2 8^{\log_6 36}\right)^{\log_5 5} = \left[\log_3\left(\underbrace{27^2}_{3^6}\right)\cdot \log_2\left(\underbrace{8^2}_{2^6}\right)\right]^1 = 6\cdot 6 = 36$$

3) Il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da $A(-1,3)$ e $B(3,1)$ è:

a) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ b) $y-2x=0$ c) $x=1$ d) $8(y-3)+(x+1)^2=0$ e) $(1,2)$

Risp. B

Si tratta dell'asse del segmento AB, la cui equazione è:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2-6x+9+y^2-2y+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-6y=-6x-2y \Leftrightarrow 8x=4y \Leftrightarrow \underline{y-2x=0}$$

4) Una sequenza è formata da 12 numeri interi consecutivi; la somma dei primi 5 è 220. Qual è la somma degli ultimi 3?

a) 156 b) 144 c) 169 d) 311 e) 196

Risp. A

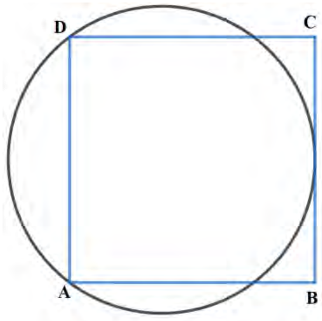
I numeri sono interi consecutivi $\Rightarrow$ i primi 5 si possono scrivere così: $x, x+1, x+2, x+3, x+4$ $\Rightarrow$ la loro somma vale $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=5x+10=5(x+2)$.

Quindi:

$$5(x+2)=220 \Leftrightarrow x+2=44 \Leftrightarrow x=42$$

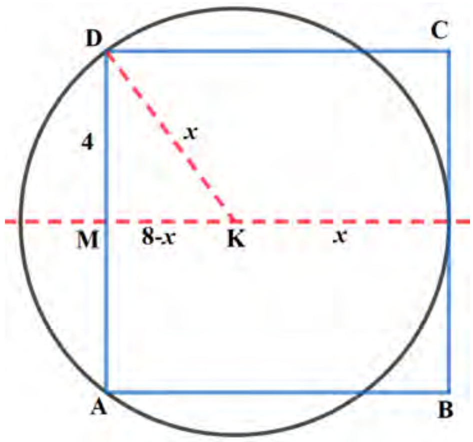
Se il primo numero della sequenza è 42, gli ultimi tre valgono 51, 52 e 53 $\Rightarrow$ la loro somma è $3\cdot 52=156$

5) Il lato del quadrato in figura misura 8 cm. Quanto misura (in cm) il raggio del cerchio, se questo passa per i vertici A e D ed è tangente al lato BC?
   a) 10
   b) $4\sqrt{5}$
   c) 5
   d) 6
   e) $8\sqrt{2}$



Risp. C

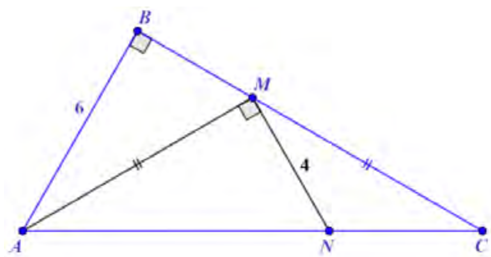
Tracciamo l'asse del segmento AD e congiungiamo D con il centro del cerchio. Otteniamo:



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo MKD otteniamo l'equazione:

$$MD^2+MK^2=KD^2 \Leftrightarrow 16+(8-x)^2=x^2 \Leftrightarrow 16+64-16x+x^2=x^2 \Leftrightarrow 80-16x=0 \Leftrightarrow x=5$$

6) All'interno del triangolo rettangolo ABC si disegna il triangolo rettangolo AMN. Sapendo che i numeri riportati in figura rappresentano le misure (in cm) dei segmenti corrispondenti, determina l'area del triangolo AMN (in cm^2).
   a) 24 b) $8\sqrt{3}$ c) 12 d) $9\sqrt{3}$ e) 16

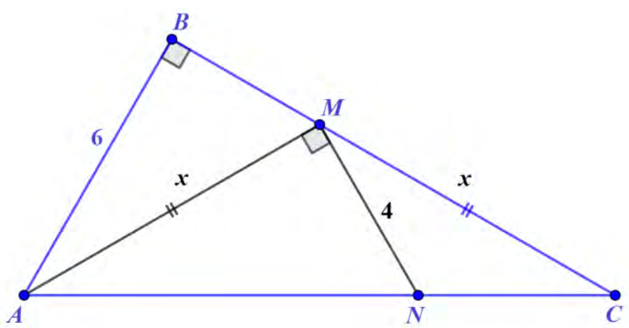


Risp. B

I triangoli rettangoli sono simili poiché hanno congruenti gli angoli acuti $\widehat{MAN}$ e $\widehat{ACB}$ (alla base di un triangolo isoscele).

Dalla similitudine ricaviamo:

$$AB:MN=BC:AM$$



Pertanto:

$$6:4 = BC:x \Leftrightarrow BC = \frac{3}{2}x$$

e quindi

$$BM = BC - MC = \frac{x}{2}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABM otteniamo:

$$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + 36 = x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 48 \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow Area(AMN) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\,cm^2$$

7) Un gas perfetto nello stato iniziale A subisce un'espansione che lo porta nello stato B, ed attraverso una compressione, torna allo stato A. Le trasformazioni sono tutte reversibili. Quale delle seguenti relazioni è errata?

a) $\Delta U_{AB} = -\Delta U_{BA}$ b) $\Delta U_{ciclo} = 0$ c) $\Delta U_{AB} = \Delta U_{BA}$

d) $\Delta U_{AB} + \Delta U_{BA} = 0$ e) $L_{ciclo} = Q_{ass} - Q_{ced}$

Risp. C

L'energia interna di un gas perfetto è una funzione di stato; pertanto la sua variazione, durante un ciclo è nulla.

Questo implica che la risposta (b) sia vera. Dal momento che le risposte (a) e (d) sono equivalenti alla risposta (b), possiamo affermare che sono entrambe vere.

Ricordando il 1° principio della termodinamica, possiamo affermare che anche la risposta (e) è vera.

La (c), invece, è falsa.

Infatti se due trasformazioni (reversibili) sono inverse una dell'altra le due variazioni di energia interna del gas sono opposte (vd. risp. a) e quindi non possono essere uguali.

8) Quale delle seguenti espressioni descrive correttamente la dipendenza del lavoro *L* dagli angoli, rispettivamente, α e β formati dal vettore $\vec{s}$ e dal vettore $\vec{F}$ con la direzione positiva dell'asse *x*?

a) $L = F \cdot s \cdot \operatorname{sen}\alpha$ b) $L = F \cdot s \cdot \operatorname{sen}\beta$ c) $L = F \cdot s \cdot \cos(\alpha - \beta)$

d) $L = F \cdot s$ e) $L = F \cdot s \cdot \cos\beta$

Risp. C

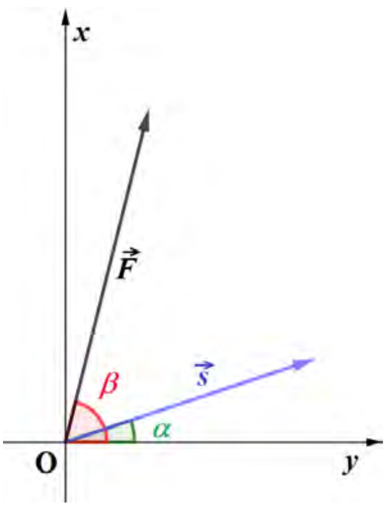
Per definizione, il lavoro di una forza è un numero ottenuto moltiplicando tra loro l'intensità della forza, quella dello spostamento ed il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori (nel nostro caso $\beta - \alpha$).

Ricordando che, per le formule sugli angoli associati:

$$\cos(-x) = \cos x$$

otteniamo

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta).$$



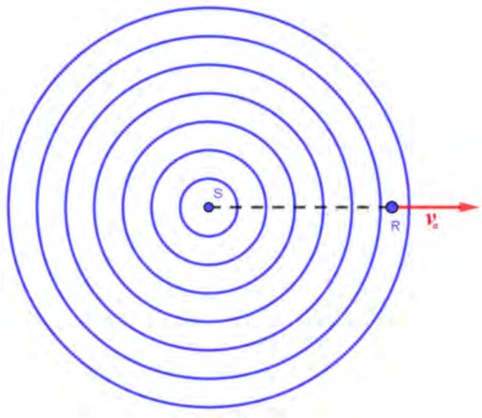
9) Indicata con *v* la velocità di propagazione del suono nell'aria, quale delle seguenti formule esprime correttamente la frequenza f_a del suono percepito da un ascoltatore che si sta allontanando con velocità v_a da una sorgente ferma, la quale produce un suono di frequenza *f* ?

a) $f_a = \dfrac{v + v_a}{v} \cdot f$ b) $f_a = \dfrac{v}{v - v_a} \cdot f$ c) $f_a = \dfrac{v_a}{v} \cdot f$

d) $f_a = \dfrac{v - v_a}{v} \cdot f$ e) $f_a = f$

Risp. D

Supponiamo che ***la sorgente sia ferma ed il ricevitore sia in moto di allontanamento*** con velocità v_a.



In queste ipotesi, il numero di fronti d'onda rilevati da R nell'unità di tempo (frequenza percepita) è inferiore a quello realmente emesso dalla sorgente. Infatti, l'osservatore percepirà un numero di fronti d'onda pari a quelli realmente emessi dalla sorgente, meno quelli che non riescono a raggiungerlo a causa del suo moto. Analizziamo in dettaglio i due casi presentati in figura.

Il numero dei fronti d'onda che R non riesce a rilevare nell'unità di tempo è pari al rapporto $\dfrac{v_a}{\lambda}$; pertanto la frequenza percepita da R è $f_a = f - \dfrac{v_a}{\lambda}$, in base alle leggi di composizione classica delle velocità.

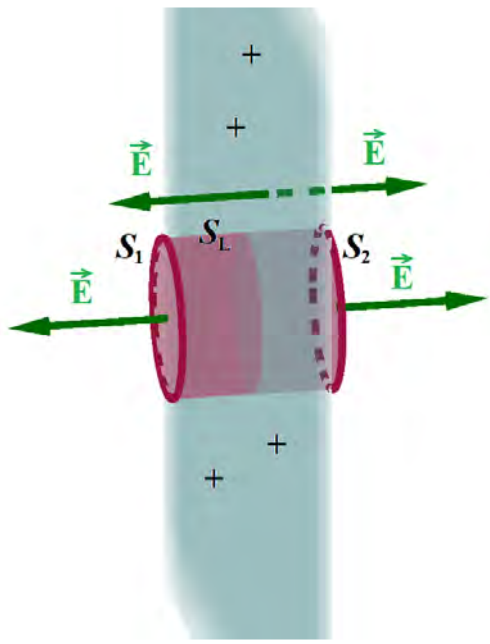
La lunghezza dell'onda emessa da S è legata alla sua frequenza da $\lambda = \dfrac{v}{f}$. Pertanto:

$$f_a = f - \frac{v_a}{\lambda} = f - \frac{v_a}{v} \cdot f = \frac{v - v_a}{v} \cdot f$$

10) Il campo elettrico generato da una distribuzione piana illimitata di carica di distribuzione superficiale σ è espresso correttamente da:

a) $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ b) $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ c) $E = \dfrac{\sigma \cdot S}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^2}$ d) $E = 0$ e) $E = \dfrac{2\sigma}{\varepsilon_0}$

Risp. B



Per fissare le idee, immaginiamo che la distribuzione di carica sia di segno positivo.

Prendiamo una superficie gaussiana di forma cilindrica, con le basi parallele ed equidistanti rispetto alla superficie piana carica (a piccola distanza dalla superficie), e la superficie laterale ortogonale al piano.

In virtù del Teorema di Gauss, il flusso del campo $\vec{E}$ uscente dalla superficie cilindrica è

$$\Phi\left(\vec{E}\right) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

D'altra parte, il flusso del campo $\vec{E}$ uscente dalla superficie cilindrica può essere calcolato come somma dei flussi Φ_1, Φ_2 e Φ_L (calcolati rispetto alle basi S_1 e S_2 ed alla superficie laterale S_L).

Dal momento che il campo $\vec{E}$ e S_L sono paralleli, il flusso Φ_L è nullo, mentre $\Phi_1 = \Phi_2 = E \cdot S$ (ove S è l'estensione della superficie di base) perché le basi del cilindro hanno la stessa estensione e sono equidistanti dal piano carico.

Pertanto risulta anche $\Phi\left(\vec{E}\right) = \Phi_1 + \Phi_2 = 2E \cdot S$

Concludendo:

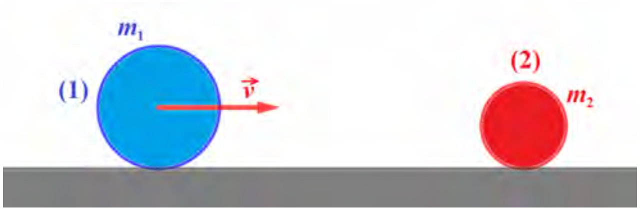
$$2E \cdot S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

11) Due sfere, uguali per forma e dimensione, si urtano centralmente, in modo perfettamente elastico. Sapendo che $m_2 = 2m_1$ e che la sfera n° 2 è inizialmente ferma, mentre la n° 1 si muove nella direzione e nel verso dell'asse *x* con velocità iniziale *v* quale delle affermazioni seguenti è corretta?

a) $v_{1f} = -\frac{v}{3}$ e $v_{2f} = \frac{2v}{3}$
b) $v_{1f} = \frac{2v}{3}$ e $v_{2f} = -\frac{v}{3}$
c) $v_{1f} = v_{2f} = \frac{v}{2}$
d) $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v$
e) Nessuna delle precedenti

Risp. A

In questo caso si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica del sistema (**NOTA:** la fig. a fianco non rispetta le dimensioni reali delle sfere). Dobbiamo quindi risolvere il sistema:



$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

Imponendo le ipotesi del testo otteniamo:

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v_{1f} + 2m_1 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_1 v_{2f}^2 \end{cases}$$

che, una volta semplificato, diviene:

$$\begin{cases} v = v_{1f} + 2v_{2f} \\ v^2 = v_{1f}^2 + 2v_{2f}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{1f} = v - 2v_{2f} \\ v^2 = v_{1f}^2 + 2v_{2f}^2 \end{cases}$$

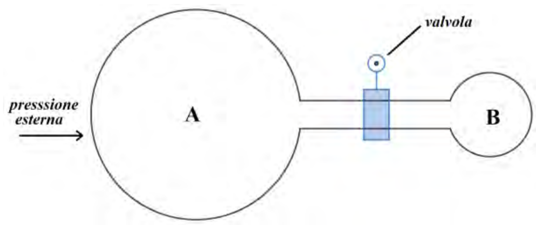
Sostituendo e semplificando otteniamo:

$$6v_{2f}^2 - 4v \cdot v_{2f} = 0 \Leftrightarrow 3v_{2f} - 2v = 0 \Leftrightarrow v_{2f} = \frac{2}{3} v$$

Dopo l'urto non può essere $v_{2f} = 0 \frac{m}{s}$; pertanto deve risultare:

$$\begin{cases} v_{1f} = v - 2v_{2f} = v - \frac{4}{3} v = -\frac{1}{3} v \\ v_{2f} = \frac{2}{3} v \end{cases}$$

12) Due palloncini di volumi differenti sono collegati da un tubo ed inizialmente isolati e conservati in ambiente isotermo. La pressione del gas al loro interno è pari alla pressione esterna. Cosa succede all'apertura della valvola?



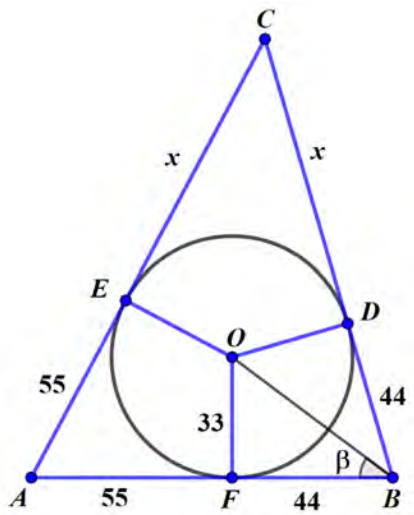
a) Nulla
b) A si gonfia e B si sgonfia
c) B si gonfia ed A si sgonfia
d) Dipende dalla temperatura dell'ambiente
e) I dati sono insufficienti per rispondere

Risp. A

Dal momento che il gas all'interno dei palloncini ha la stessa pressione dell'ambiente esterno, siamo in una situazione di equilibrio. All'apertura della valvola non accade nulla.

QUESITO NUMERICO – matematica

Il triangolo ABC è circoscritto ad una circonferenza. In figura sono riportate le misure (in cm) di alcuni segmenti; determina la misura (in cm) del lato BC.



Soluzione

Posto $CD = x$, per il teorema delle due tangenti risulta anche:

- $CE = x$
- $AE = 55cm$
- $BD = 44cm$

Consideriamo il triangolo rettangolo OFB; usando le terne pitagoriche otteniamo: $OB = 55cm$

Pertanto:

- $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$
- $\cos\beta = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}2\beta = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

Dal teorema sull'area dei triangoli: $Area = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\operatorname{sen}2\beta = \frac{1}{2}\cdot 99(44+x)\cdot\frac{24}{25} = \frac{99\cdot 12}{25}(44+x)$

In base al teorema sul raggio del cerchio inscritto ad un poligono: $r = \frac{2Area}{Perimetro}$

Quindi:

$$r\cdot Perimetro = 2Area \Leftrightarrow 33\cdot 2(55+44+x) = \frac{99\cdot 24}{25}(44+x) \Leftrightarrow 99+x = \frac{3\cdot 12}{25}(44+x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 99\cdot 25 + 25x = 36\cdot 44 + 36x \Leftrightarrow 11x = 11\cdot 9\cdot 25 - 4\cdot 9\cdot 4\cdot 11 \Leftrightarrow 11x = 11\cdot 9(25-16) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 9\cdot 9 = 81$$

Pertanto: $BC = 81 + 44 = 125cm$

QUESITO NUMERICO – fisica

Un giocatore di rugby si smarca dal suo difensore e s'invola verso la meta con una velocità costante di $6.00\frac{m}{s}$. Dopo $2.00s$ il difensore avversario ritrova l'equilibrio e si lancia all'inseguimento con un'accelerazione costante di $4.50\frac{m}{s^2}$. Calcola lo spazio percorso dall'attaccante prima di essere raggiunto dal difensore.

Soluzione

Spazio percorso dai due giocatori all'istante *t*.

ATTACCANTE	DIFENSORE
$x = 6\cdot t$	$x = \frac{4.5}{2}(t-2)^2$

Il difensore raggiunge l'attaccante nell'istante in cui:

$$6t = \frac{9}{4}(t-2)^2 \Leftrightarrow 2t = \frac{3}{4}(t-2)^2 \Leftrightarrow 8t = 3t^2 - 12t + 12 \Leftrightarrow 3t^2 - 20t + 12 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 100 - 36 = 64 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10\pm 8}{3} = \begin{cases} \nearrow 6s \\ \searrow 0.66s \end{cases}$$

La soluzione accettabile è $t = 6s$ (in quanto maggiore di 2).

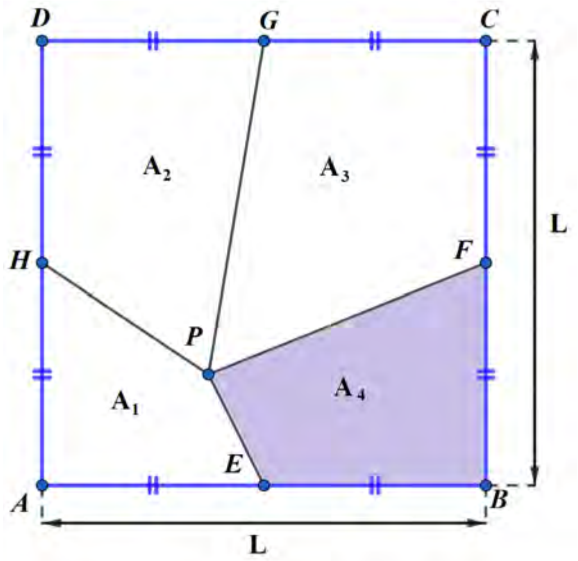
$\Rightarrow$ lo spazio percorso dall'attaccante è, quindi: $s = 6\cdot 6 = 36m$

PROBLEMA MATEMATICA

Dopo aver fissato arbitrariamente un punto P all'interno del quadrato ABCD, di lato L, lo si congiunge con i punti medi dei lati del quadrato come in figura. Indicate con A_1, A_2, A_3, A_4 le aree dei quadrilateri in cui il quadrato risulta così suddiviso, dimostra che:

a) $A_4 = A_1 + A_3 - A_2$

b) $L = \sqrt{2(A_1 + A_3)}$



<u>In un secondo momento</u>, supponendo che $\frac{L^2}{2} = 32\,cm^2$ e che il punto P disti 1 cm sia da AD che da CD, determina la misura dell'area colorata ed il raggio del cerchio in essa inscritto.

SOLUZIONE

Prima parte

(a)

Indicata con x la distanza di P da AD e con y quella da AB determiniamo le aree A_1 ed A_3, pensando a questi quadrilateri come *somme* di triangoli aventi in comune, rispettivamente, AP e CP. Otteniamo:

- $A_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2} \cdot x + \frac{L}{2} \cdot y\right] = \frac{L}{4}(x+y)$
- $A_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2} \cdot (L-x) + \frac{L}{2} \cdot (L-y)\right] = \frac{L}{4}\left[2L-(x+y)\right]$

Pertanto:

$$A_1 + A_3 = \frac{L}{4}(x+y) + \frac{L}{4}\left[2L-(x+y)\right] = \frac{L}{4} \cdot 2L = \frac{L^2}{2}$$

Per differenza di aree, otteniamo anche

$$A_2 + A_4 = L^2 - (A_1 + A_3) = L^2 - \frac{L^2}{2} = \frac{L^2}{2}.$$

Quindi:

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4$$

da cui

$$A_4 = A_1 + A_3 - A_2$$

(b)

Per quanto osservato in (a) otteniamo anche

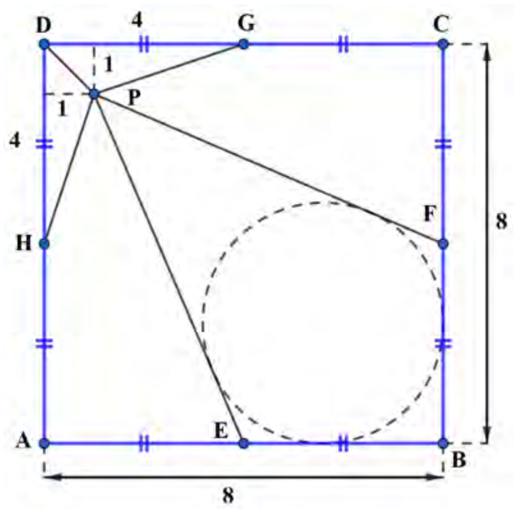
$$\frac{L^2}{2} = A_1 + A_3 \Leftrightarrow L^2 = 2(A_1 + A_3) \Leftrightarrow L = \sqrt{2(A_1 + A_3)}$$

Seconda parte

Se P è equidistante da AD e da DC significa che appartiene alla bisettrice dell'angolo $\widehat{ADC}$, cioè alla diagonale BD del quadrato. La figura presenta, pertanto, una simmetria assiale.

Dalla relazione (b) risulta:

$$L = \sqrt{2(A_1 + A_3)} \Leftrightarrow L^2 = 2(A_1 + A_3) \Leftrightarrow A_1 + A_3 = \frac{L^2}{2} = 32\,cm^2$$



Calcoliamo l'area $A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 4\,cm^2$.

Pertanto, utilizzando la (a):

$$A_4 = 32 - 4 = 28\,cm^2$$

Per trovare il raggio del cerchio inscritto in A_4 utilizziamo il teorema:

$$r = \frac{2\,Area}{Perimetro}$$

Calcoliamo quindi il perimetro di EBFP.

Per trovare PF = PE, utilizziamo un opportuno riferimento cartesiano in cui l'origine coincide con il punto A, l'asse x coincide con la retta AB e l'asse y con la retta AD.

Così facendo risulta: $P(1,7)$ e $F(8,4)$. Pertanto:

$$PF = \sqrt{(8-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{58}\,cm$$

$\Rightarrow$ Per simmetria:

$$Perimetro = 2\left(\sqrt{58} + 4\right)cm$$

e quindi

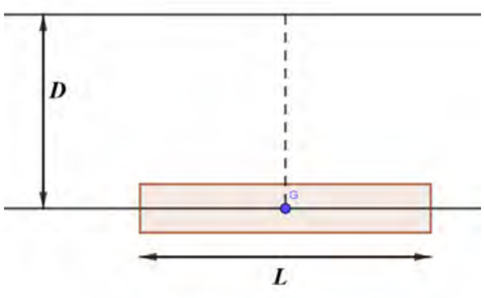
$$r = \frac{2\,Area}{Perimetro} = \frac{2 \cdot 28}{2\left(\sqrt{58}+4\right)} = \frac{28}{\sqrt{58}+4}\,cm$$

che può essere riscritto anche nella forma

$$r = \frac{28}{\sqrt{58}+4} = \frac{28\left(\sqrt{58}-4\right)}{58-16} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{58}-4\right)cm$$

PROBLEMA FISICA

Un cassettone giace su un piano orizzontale ruvido, come schematicamente indicato in figura (vista dall'alto). La massa del cassettone è $M = 150\,kg$, la lunghezza è *L*; il coefficiente di attrito fra il cassettone e la superficie è $\mu = 0.5$.



Un uomo vuole spostare il cassettone spingendolo; la massima forza che l'uomo può applicare è 350 N. Spiega come l'uomo può spostare il centro di massa del cassettone in modo da portarlo ad una distanza *D* dalla sua posizione iniziale.
[**NOTA:** Si consideri il cassettone un corpo rigido ideale.]

SOLUZIONE

Osserviamo innanzitutto che la forza d'attrito tra il cassettone ed il pavimento è molto più alta della massima forza che l'uomo può applicare:

$$F_a = \mu \cdot mg = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 150 = 735\,N$$

Non si può, quindi, pensare che l'uomo riesca a spostare il cassettone facendolo semplicemente traslare.
Si può, però, pensare di tirare il cassettone da un lato (per fissare le idee, dal lato destro in figura) e farlo ruotare utilizzando il lato destro come perno.
Dopo aver ottenuto una parziale rotazione del cassettone, si inverte il processo: si tira il cassettone dal lato sinistro, facendo perno sul fianco destro.
Dopo un certo numero di operazioni di questo tipo, il centro di massa del cassettone si troverà a distanza D dalla posizione iniziale.