7° BORSA DI STUDIO "RICCARDO ROSSI"
Traccia di correzione

Maschera dei risultati per le domande a risposta chiusa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	E	D	C	B	E	D	B	A	D	B	C	A	E	B	D	C	A

Risultati problemi numerici:

19) **0**

20) **15**

Spiegazione delle risposte di Matematica e Fisica:

N. 1
Dal momento che

$$N = n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$$

è necessario che uno (solo uno, però!) dei due fattori sia 1. Va quindi escluso dalla ricerca il caso $n=0$, perché porterebbe a $N=1$ che non è primo.

- Se $n<0$, il minore dei due fattori è n^2+n+1 e vale 1 se e solo se $n=-1$ (avendo dovuto escludere $n=0$). In questa situazione risulta $n^2-n+1=3 \Rightarrow N=3\cdot 1=3$
- Se $n>0$, il minore dei due fattori è n^2-n+1 e vale 1 se e solo se $n=1$ (avendo dovuto escludere $n=0$). In questa situazione risulta $n^2+n+1=3 \Rightarrow N=3\cdot 1=3$

Come si vede, abbiamo un unico numero primo che possa essere scritto nella forma $N=n^4+n^2+1$.

N. 2
Applicando un numero finito di volte la formula del cambio di base otteniamo

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{127}128 = \log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\ldots\cdot\log_{127}128 = \log_2 4\cdot\ldots\cdot\log_{127}128 = \ldots = \log_2 128 = 7$$

N. 3
Posto $EH = x$ risulta $CE = 5+x$ e $ME = 10-x$.
Per il Teorema di Pitagora otteniamo:

$$EM^2 = MH^2 + EH^2 \quad \text{e} \quad CG^2 + MH^2 = CE^2$$

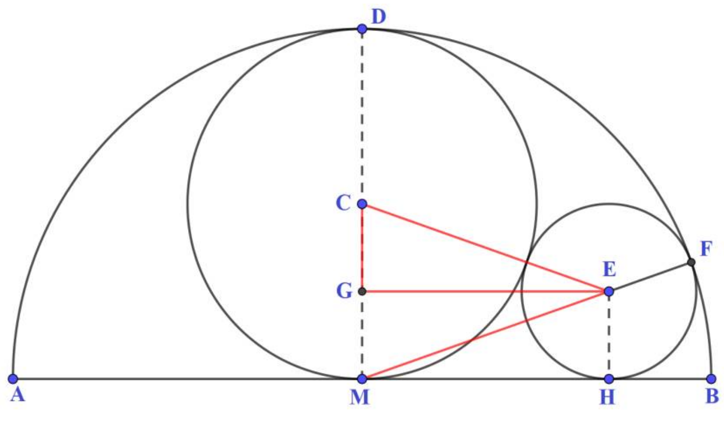
da cui, essendo $CG = CM - EH$:

$$\left(CM-EH\right)^2 + EM^2 - EH^2 = CE^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(5-x\right)^2 + \left(10-x\right)^2 - x^2 = \left(5+x\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25-10x+x^2+100-20x+x^2-x^2 = 25+10x+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

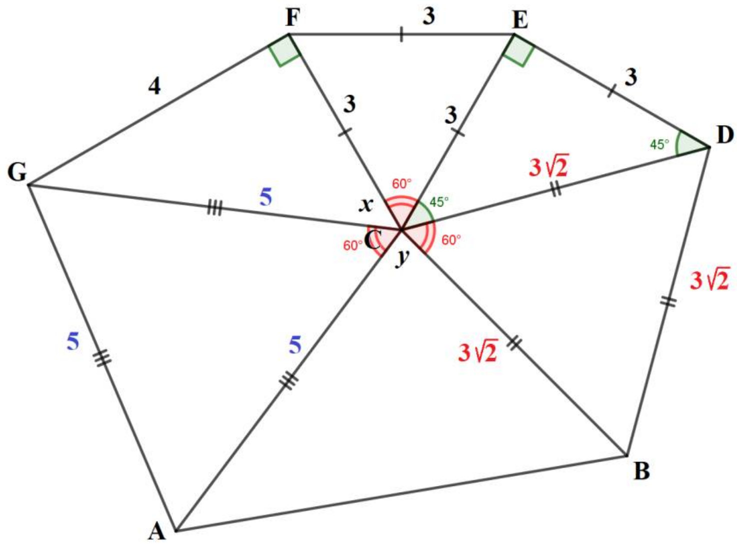


N. 4

In base ai dati deducibili dalla figura otteniamo $AC = 5u$ e $BC = 3\sqrt{2}\,u$.

Posto $x = \widehat{FCG}$ e $y = \widehat{ACB}$, risulta:

- $senx = \frac{4}{5}$
- $\cos x = \frac{3}{5}$



Inoltre:

$$x + y + \frac{\pi}{4} + \pi = 2\pi \;\Rightarrow\; y = \frac{3}{4}\pi - x$$

Quindi:

$$sen\, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{10}\sqrt{2}$$

e pertanto

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC seny = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{7}{10}\sqrt{2} = \ldots = \frac{21}{2} u^2$$

N. 5

Si ha un unico caso favorevole; il numero dei casi possibili è pari a quello delle permutazioni su 3 oggetti, cioè 3! = 6 $\Rightarrow$ la probabilità vale $\frac{1}{6}$.

N. 6

La somma delle cifre di ciascuno dei due numeri dev'essere un multiplo di 3.

$7 + A + 4 + 5 + 2 + B + 1 = 3n \;\Rightarrow\; 19 + A + B = 3n$

$3 + 6 + A + 2 + B + 4 + C = 3m \;\Rightarrow\; 15 + A + B + C = 3m$

Calcolando una differenza membro a membro:

$$4 - C = 3(n - m) \;\Leftrightarrow\; C = 3(m - n + 1) + 1$$

Quindi può solo essere $C = 1$.

N. 7

Quando un conduttore sferico di raggio R viene caricato con una carica Q e si raggiunge la condizione di ***equilibrio elettrostatico***, il campo elettrico è:

- nullo all'interno della sfera conduttrice;
- diretto in senso radiale per punti esterni alla sfera, ove la sua intensità è pari a quella che si avrebbe se tutta la carica Q fosse concentrata al centro della sfera.

Inoltre, l'intero volume della sfera conduttrice è ***equipotenziale*** $\Rightarrow$ il potenziale di un qualsiasi punto interno o sulla superficie della sfera è quindi non nullo, dovendo essere:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \qquad\qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}$$

nel vuoto — **in presenza di un dielettrico**

N. 8

Ricordiamo che l'indice di rifrazione è definito da $n = \frac{c}{v}$, ove c è la velocità della luce nel vuoto e v è quella nel gas $\Rightarrow$ la presenza di un gas produce una diminuzione della velocità: $v = \frac{c}{n}$

Dal momento che $\lambda = \frac{v}{f}$ e che la frequenza della luce non varia al variare del mezzo di propagazione, la diminuzione di velocità corrisponde ad una diminuzione della lunghezza d'onda.

N. 9

Ricordiamo che il periodo del pendolo è espresso da $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ e che la frequenza di un moto periodico è l'inverso del periodo. Pertanto $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$.

Come si nota, la frequenza è direttamente proporzionale a $\sqrt{g}$ e quindi cresce assieme al valore dell'accelerazione di gravità. Dal momento che sulla Luna il valore dell'accelerazione di gravità è circa $\frac{1}{6}$ di quello che ha sulla Terra, la frequenza diminuisce, ma non si annulla.

N. 10

Il lavoro compiuto dalla scalatrice per salire fino alla cima della palestra di roccia è pari alla sua variazione di energia potenziale gravitazionale; pertanto è espresso da:

$$L = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{L}{mg} \simeq \frac{6000}{50 \cdot 10} = 12\,m$$

N. 11

La pressione esercitata da un fluido sulla base del cilindro è espressa dalla Legge di Stevino:

$$p = d \cdot g \cdot h$$

ove *d* è la densità del fluido e *h* è l'altezza del fluido nel cilindro.

Dal momento che la densità della benzina è inferiore a quella dell'acqua, e che l'altezza *h* è la stessa, la pressione alla base del cilindro contenente benzina è inferiore a quella del cilindro contenente acqua.

N. 12

Durante una trasformazione isoterma, la temperatura (per definizione) rimane costante. Dal momento che la variazione di energia interna del gas è proporzionale alla variazione di temperatura, anche l'energia interna rimane costante, cioè $\Delta U = 0\,J$.

Dal 1° principio della termodinamica, $Q = \Delta U + L = L \;\Rightarrow\; Q + 2\Delta U = L$

Infine, visto che si tratta di un'espansione, il lavoro compiuto dal gas è positivo; per quanto visto sopra, quindi, anche il calore Q è positivo (quindi viene assorbito e non ceduto dal sistema all'ambiente)

Quesiti numerici

Matematica

Poniamo

$$x = \frac{a}{b-c} \qquad\qquad y = \frac{b}{c-a} \qquad\qquad z = \frac{c}{a-b}$$

e consideriamo:

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \left(\frac{a}{b-c}+1\right)\left(\frac{b}{c-a}+1\right)\left(\frac{c}{a-b}+1\right) = \frac{a+b-c}{b-c}\cdot\frac{b+c-a}{c-a}\cdot\frac{c+a-b}{a-b}$$

ed anche

$$(x-1)(y-1)(z-1) = \left(\frac{a}{b-c}-1\right)\left(\frac{b}{c-a}-1\right)\left(\frac{c}{a-b}-1\right) = \frac{a-b+c}{b-c}\cdot\frac{b-c+a}{c-a}\cdot\frac{c-a+b}{a-b}$$

$\Rightarrow$ in questo caso:

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$$

da cui, sviluppando i calcoli:

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = xyz - xy - xz - yz + x + y + z - 1 \Leftrightarrow 2xy + 2xz + 2yz + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy + xz + yz = -1$$

Quindi:

$$S^2 = \left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) = x^2+y^2+z^2-2$$

In base all'ipotesi $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \frac{b^2}{(c-a)^2} - 2 = -\frac{c^2}{(a-b)^2}$ risulta quindi:

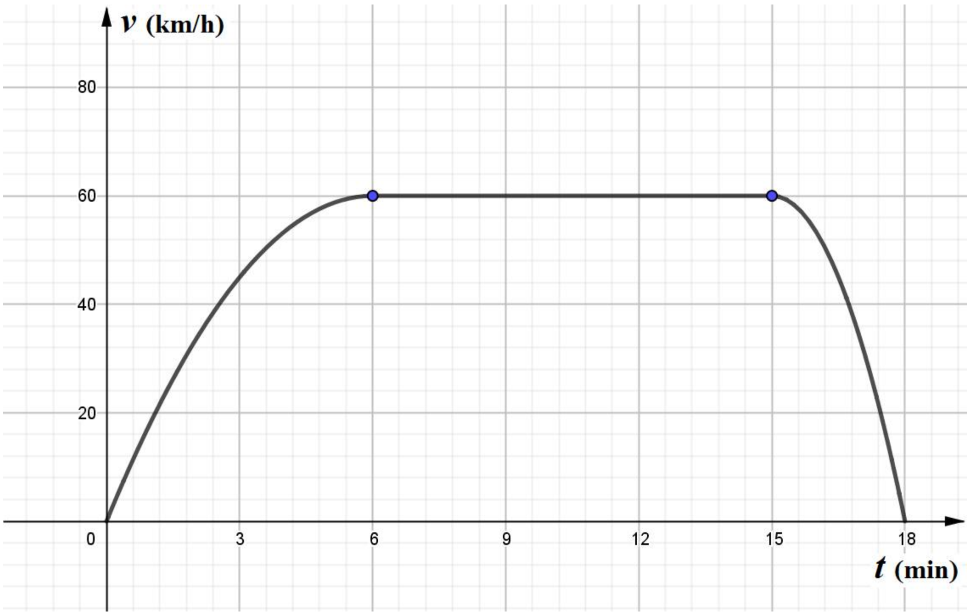
$$x^2 + y^2 - 2 = -z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

e pertanto

$$S^2 = \left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 = x^2+y^2+z^2-2 = 2-2 = 0 \Rightarrow \boxed{S=0}$$

Fisica

L'area sotto al grafico velocità/tempo rappresenta lo spazio percorso. In questo caso dobbiamo tener conto del fatto che la fase di accelerazione e quella di decelerazione sono modellizzate da archi di parabola $\Rightarrow$ per il calcolo dell'area dobbiamo usare il Teorema di Archimede, dopo aver trasformato i minuti in frazione di ore.



- TRATTO 1: ACCELERAZIONE

  6 minuti corrispondono a $\frac{1}{10}h$. Quindi la base del segmento parabolico è $2\cdot\frac{1}{10}h=\frac{1}{5}h$:

$$s_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(60\frac{km}{h}\right)\left(\frac{1}{5}h\right)=4\,km$$

- TRATTO 2: MOTO RETTILINEO UNIFORME

  9 minuti corrispondono a $\frac{3}{20}h$. Quindi:

$$s_2=\left(60\frac{km}{h}\right)\left(\frac{3}{20}h\right)=9\,km$$

- TRATTO 3: DECELERAZIONE

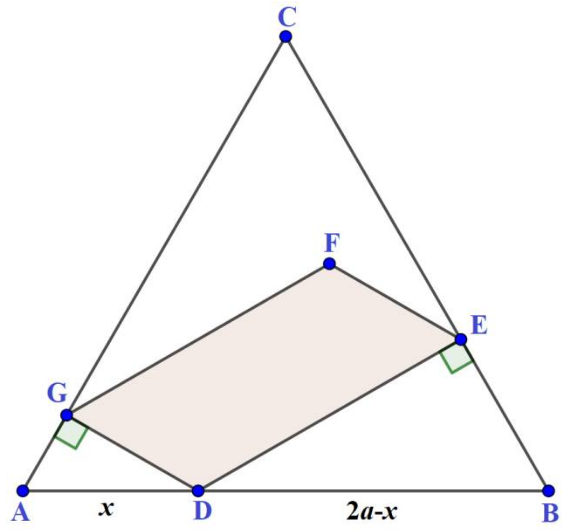
  3 minuti corrispondono a $\frac{1}{20}h$. Quindi la base del segmento parabolico è $2\cdot\frac{1}{20}h=\frac{1}{10}h$:

$$s_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(60\frac{km}{h}\right)\left(\frac{1}{10}h\right)=2\,km$$

$\Rightarrow$ La distanza che separa Alessandro dalla fidanzata è:

$$s=s_1+s_2+s_3=15\,km$$

Matematica – problema aperto



Poniamo $AD = x$; in questo modo $DB = 2a - x$.

Dal momento che ABC è equilatero, risulta $GD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ e $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}(2a - x)$; inoltre: $\widehat{ADG} = \widehat{BDE} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{GDE} = \pi - 2\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$

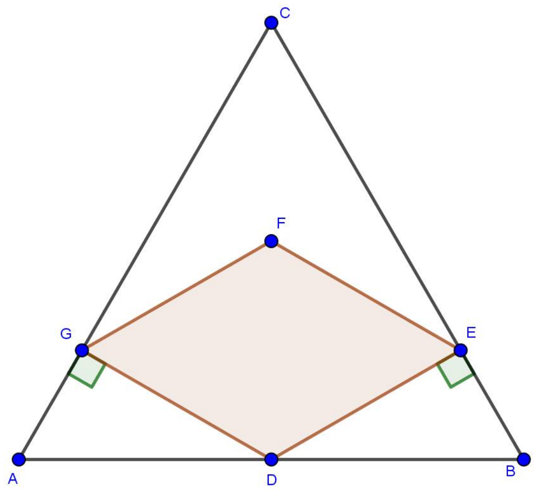
Quindi l'area del parallelogramma vale:

$$Area(DEFG) = GD \cdot DE \cdot sen\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(2a - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(2ax - x^2\right)$$

La funzione da massimizzare è, com'è evidente, una parabola con la concavità verso il basso $\Rightarrow$ il massimo dell'area corrisponde al vertice della parabola, cioè si ottiene per $x = a$.

$\Rightarrow$ l'area è massima quando il punto D è punto medio del lato AB.



Il valore massimo dell'area è, pertanto:

$$Area_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(2a^2 - a^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$$

Inoltre, la somma delle aree dei triangoli ADG e DEB è pari all'area del triangolo equilatero di lato *a*, cioè vale:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Dal momento che l'area del triangolo ABC vale:

$$A' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4a^2 = \sqrt{3}a^2$$

l'area cercata vale:

$$Area(FECG) = \sqrt{3}a^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \sqrt{3}a^2 - \frac{5\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$$

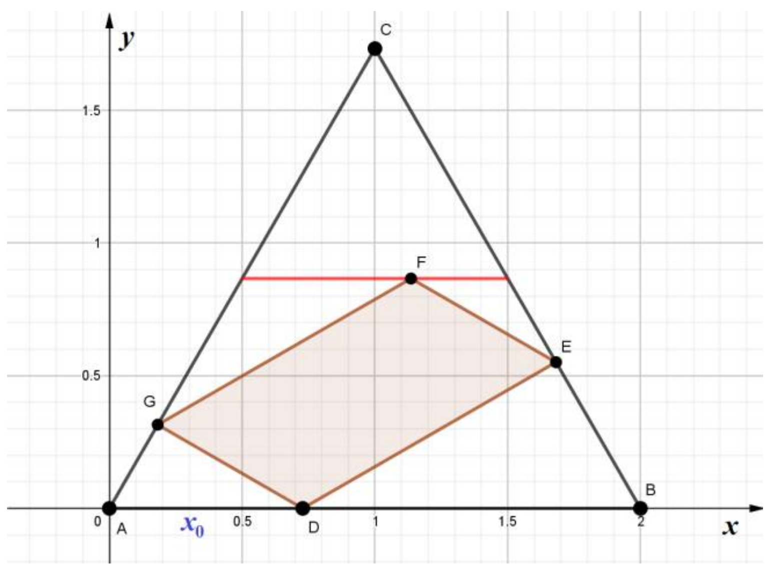
Fissiamo un riferimento cartesiano con l'origine in A e $a = 1$. In questo riferimento:

- Retta AC: $y = \sqrt{3}x$
- Retta BC: $y = -\sqrt{3}(x - 2)$
- Retta GD: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_0)$
- Retta DE: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_0)$

$\Rightarrow$ punto G:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_0) \end{cases}$$

da cui



$$\sqrt{3}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-x_0) \Leftrightarrow 3x=(x_0-x) \Leftrightarrow x=\frac{x_0}{4}$$

e quindi anche

$$G\left(\frac{x_0}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}x_0\right)$$

Analogamente il punto E si determina col sistema:

$$\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-2) \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-x_0) \end{cases}$$

da cui

$$-\sqrt{3}(x-2)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-x_0) \Leftrightarrow -3(x-2)=(x-x_0) \Leftrightarrow -3x+6=x-x_0 \Leftrightarrow x=\frac{6+x_0}{4}$$

e quindi

$$y=-\sqrt{3}\left(\frac{6+x_0}{4}-2\right)=\ldots=-\sqrt{3}\,\frac{x_0-2}{4}$$

Pertanto:

$$E\left(\frac{6+x_0}{4},-\sqrt{3}\,\frac{x_0-2}{4}\right)$$

Il punto medio M del segmento GE (diagonale del parallelogramma) ha, quindi, coordinate:

- $x_M=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{4}+\frac{6+x_0}{4}\right)=\frac{2x_2+6}{8}=\frac{x_0+3}{4}$
- $y_M=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x_0-\sqrt{3}\,\frac{x_0-2}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}(x_0-x_0+2)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ Il punto F, quarto vertice del parallelogramma, è tale che il punto medio del segmento DF sia ancora M. Pertanto:

$$\begin{cases} x_F=2x_M-x_D=\frac{x_0+3}{2}-x_0=\frac{3-x_0}{2} \\ y_F=2y_M-y_D=\frac{\sqrt{3}}{2}-0=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

e quindi il punto F appartiene alla retta di equazione $\underline{y=\frac{\sqrt{3}}{2}}$, che risulta il luogo geometrico del punto F.

Fisica – problema aperto

Quando tra le armature del condensatore c'è il vuoto (o l'aria, visto che se ne può trascurare la costante dielettrica relativa, vd. fig. 1*a* e fig. 2*a*):

- la d.d.p. tra le armature vale V_0;
- la carica tra le armature vale $Q_0 = C_0 V_0$;
- l'energia accumulata nel condensatore è $U_0 = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$

Quando inseriamo il dielettrico, dobbiamo distinguere i due casi.

1. **Il generatore rimane collegato.** Quindi il processo avviene <u>a potenziale costante</u>.

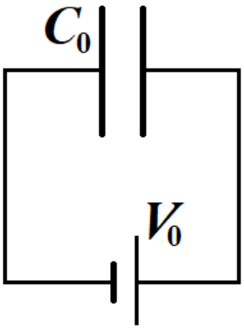


Fig. 1*a*

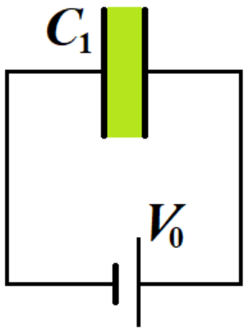


Fig. 1*b*

In questo caso il dielettrico si polarizza e cambia la capacità del condensatore: $C_1 = \varepsilon_r C_0$.

A parità di d.d.p. tra le armature, la carica è cambiata: $Q_1 = C_1 V_0 = \varepsilon_r C_0 V_0 = \varepsilon_r Q_0$.

In questo caso l'energia accumulata nel condensatore è:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 V_0^2$$

Quindi, la variazione di energia accumulata nel generatore è:

$$\Delta U_1 = U_1 - U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 V_0^2 - \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(\varepsilon_r - 1 \right)$$

NOTA: In questo caso la variazione di energia accumulata dal generatore è positiva; l'inserimento del dielettrico fa aumentare l'energia accumulata nel condensatore (e la differenza rispetto al valore iniziale è fornita dal generatore).

2. **Il generatore viene scollegato.** Quindi il processo avviene <u>a carica costante</u>; con il generatore scollegato, infatti, la carica depositata sulle armature del condensatore non può variare.

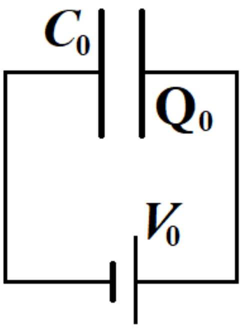


Fig. 2*a*

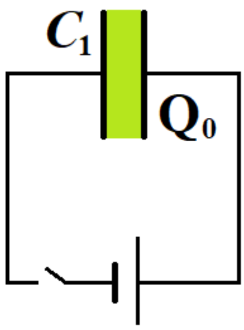


Fig. 2*b*

Anche in questo caso il dielettrico si polarizza e cambia la capacità del condensatore e $C_1 = \varepsilon_r C_0$.

Quindi $Q_0 = \varepsilon_r C_0 V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_r C_0} = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$

In questo caso l'energia accumulata nel condensatore è:

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_2^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0\left(\frac{V_0}{\varepsilon_r}\right)^2 = \frac{1}{2}C_0\frac{V_0^2}{\varepsilon_r} = \frac{1}{2}C_0V_0^2\cdot\frac{1}{\varepsilon_r}$$

Quindi, la variazione di energia accumulata nel generatore è:

$$\Delta U_2 = U_2 - U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2\cdot\frac{1}{\varepsilon_r} - \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}C_0V_0^2\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right) = \frac{1}{2}C_0V_0^2\cdot\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$$

NOTA: In questo caso la variazione di energia accumulata dal generatore è negativa; l'inserimento del dielettrico fa diminuire l'energia accumulata nel condensatore dal momento che il generatore non è in grado di fornire il lavoro necessario a mantenere costante la d.d.p. tra le armature.

Calcoliamo, ora, il rapporto richiesto:

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} = \frac{\frac{1}{2}C_0V_0^2\cdot\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}}{\frac{1}{2}C_0V_0^2\cdot(\varepsilon_r-1)} = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\cdot\frac{1}{\varepsilon_r-1} = -\frac{1}{\varepsilon_r}$$