CONCORSO PER L'ASSEGNAZIONE DELLA BORSA DI STUDIO "RICCARDO ROSSI"

CORREZIONE A CURA DI LORENZO MENEGHINI

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA DI MATEMATICA E FISICA

N. 1
I simboli letterali utilizzati nella costruzione dei numeri romani sono M = 1000, D = 500, C = 100, L = 50, X = 10, V = 5 e I = 1; per comporre il numero più grande utilizzando una sola volta tutti i simboli, si scrive:

MDCLXVI = 1666

Risp. B

N. 2
Da $(16 + x) : (36 + x) = (84 + x) : (120 + x)$ segue $(36 + x)(84 + x) = (120 + x)(16 + x)$, cioè $3024 + 120x + x^2 = 1920 + 136x + x^2$, da cui si ricava facilmente $16x = 1104$.
Il numero da aggiungere è, quindi:

$$x = \frac{1104}{16} = 69$$

Risp. D

N. 3
$$f(x+1) - f(x) = 5^{x+1} - 5^x = 5^x \cdot 5 - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \cdot 5^x$$
Risp. A

N. 4
$$\frac{x^2}{1-xy} > \frac{x}{(1-xy)y} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-xy} - \frac{x}{(1-xy)y} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-xy}\left(\frac{xy-1}{y}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow$ x e y sono discordi.
Ciò è impossibile, visto che entrambi i numeri sono positivi per ipotesi.
Risp. D

N. 5
In una quaterna di numeri naturali positivi ci sono sicuramente un multiplo di 2, un multiplo di 3 ed un multiplo di 4. Pertanto il loro prodotto è divisibile per $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
Risp. D

N. 6
In un giorno di lavoro, i tre operai insieme costruiscono:
$$\frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{11}{6} = \frac{20+21+22}{12} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5{,}25m$$
Pertanto in 10 giorni vengono costruiti 52,5 m di muro. Con questo ritmo avrebbero finito il lavoro in 16 giorni, ma ne impiegano, invece, 19.

Se si ammala Luigi, gli altri due operai costruiscono $\frac{7}{4} + \frac{11}{6} = \frac{21+22}{12} = \frac{43}{12} = 3{,}58\bar{3}m$ al giorno; in 9 giorni vengono costruiti $\frac{43}{12} \cdot 9 = \frac{129}{4} = 32{,}25m$ ed il muro viene sì completato, <u>ma in un tempo di poco inferiore rispetto ai 19 giorni</u>.

Se, invece, si ammala Ugo, gli altri due operai costruiscono $\frac{5}{3}+\frac{7}{4}=\frac{20+21}{12}=\frac{41}{12}=3,41\overline{6}m$ al giorno; in 9 giorni vengono costruiti $\frac{41}{12}\cdot 9=\frac{123}{4}=30,75m$ ed il muro non viene completato.

Se, infine, si ammala Mino, gli altri due operai costruiscono $\frac{5}{3}+\frac{11}{6}=\frac{10+11}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}=3,5m$ al giorno; in 9 giorni vengono costruiti $\frac{7}{2}\cdot 9=\frac{63}{2}=31,5m$ ed il muro viene completato esattamente in 19 giorni.

Risp. C

N. 7

I due treni, procedendo alla stessa velocità, si incontrano a metà strada, cioè dopo 15 km dalla partenza del primo treno. Fissando l'origine del riferimento nella stazione da cui parte il primo treno ed esprimendo il tempo in ore, l'aquila raggiunge T_2 quando

$$70t=30-50t \Leftrightarrow 120t=30 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}h$$

Pertanto l'aquila ha percorso $\frac{70}{4}km=17,5km$ prima di riposarsi sul secondo treno; poi percorre $2,5km$ sul tetto del secondo treno. In tutto ha percorso 20 *km*.

Risp. C

N. 8

La densità di un gas è il rapporto tra la sua massa ed il suo volume. Se la densità rimane costante, possiamo dedurne che rimane costante pure il volume del gas; la trasformazione è isocora: *p* e *T* sono direttamente proporzionali. Quindi la pressione raddoppia.

Risp. A

N. 9

Per la legge di continuità della portata, $A_1v_1=A_2v_2$; pertanto $v_2=\frac{A_1v_1}{A_2}=\frac{6\cdot 10^{-4}\cdot 0,8}{4\cdot 10^{-4}}=1,2\frac{m}{s}$

Risp. A

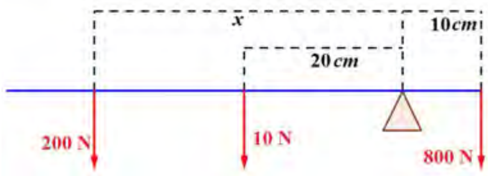
N. 10

B aumenta del 40 %; quindi B' = 1,4 B. Perciò $A'=\frac{k}{(B')^2}=\frac{k}{(1,4B)^2}=\frac{k}{1,96B^2}=\frac{1}{1,96}\frac{k}{B^2}$.

$$A'-A=\frac{1}{1,96}A-A=\left(\frac{1}{1,96}-1\right)A=\frac{1-1,96}{1,96}A=-\frac{0,96}{1,96}A=-\frac{96}{196}A=-\frac{24}{49}A\simeq -0,49A$$

Pertanto A diminuisce del 49 % circa.

Risp. C



N. 11

Per semplicità esprimiamo i momenti delle forze applicate alla trave in *N·cm*; l'equazione di equilibrio dei momenti è quindi:

$$200x+10\cdot 20=800\cdot 10 \Leftrightarrow 20x+20=800 \Leftrightarrow 20x=780 \Leftrightarrow x=39cm$$

Risp. C

N. 12

La lunghezza d'onda si calcola mediante la formula $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{440} = \frac{17}{22} \simeq 0,77\,m$

Risp. B

Risposte corrette BIOLOGIA E CHIMICA:
La stringa delle risposte corrette è la seguente: 13 C - 14 E - 15 E - 16 B - 17 B - 18 D

QUESITO A RISPOSTA NUMERICA DI MATEMATICA
Dopo ogni minuto la temperatura diminuisce del 10 %, pertanto se t è la temperatura iniziale, dopo un minuto la temperatura diventa $t' = 0,9\,t$.

TEMPO (MIN)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
TEMPERATURA (°C)	36,5	32,85	29,565	26,6085	23,94765

Dopo 4 minuti la temperatura ha raggiunto il valore critico.

ALTRO MODO:
Utilizzando le progressioni geometriche, si imposta l'equazione: $24 = 36,5 \cdot 0,9^n$.

Quindi: $0,9^n = \frac{24}{36,5} \simeq \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Calcoliamo per quale valore di n risulta $0,9^n \simeq 0,67$.

n	1	2	3	4
$0,9^n$	0,9	0,81	0,729	0,6561

Quindi $n = 4$.

QUESITO A RISPOSTA NUMERICA DI FISICA
Per definizione la velocità di fuga di un corpo di massa m da un pianeta di massa M e raggio R si ottiene dall'equazione: $-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$

Pertanto, semplificando, si ottiene: $v^2 = \frac{2GM}{R}$

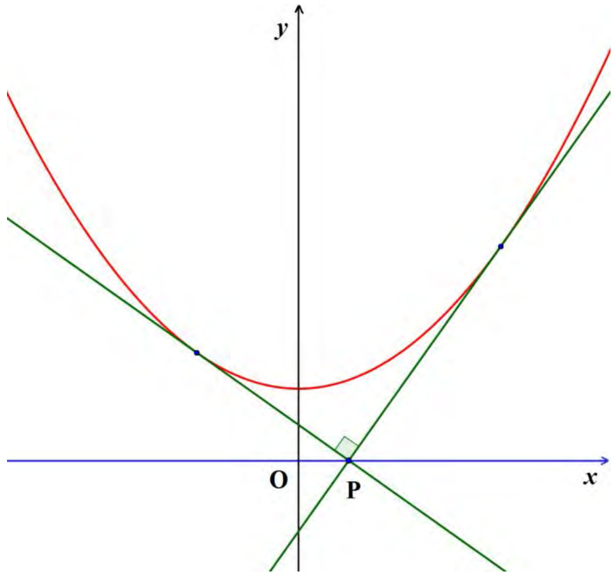
Se la velocità è pari a metà della velocità di fuga, il razzo arriva a distanza $x = R + h$ dal centro del pianeta, calcolabile mediante l'equazione:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{R+h} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\frac{2GM}{R} - G\frac{M}{R} = -G\frac{M}{R+h} \Leftrightarrow \frac{1}{4R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4R} = -\frac{1}{R+h} \Leftrightarrow 3R + 3h = 4R \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3}\cdot 1,5\cdot 10^6 = 2\cdot 10^6 m = 2000\,km$$

La quota vale, quindi 2000 km.

PROBLEMA 1



Se scegliamo il sistema di riferimento in modo che l'asse della parabola coincida con l'asse *y* e che la direttrice della parabola coincida con l'asse *x*, possiamo inoltre scegliere l'unità di misura in modo che il vertice della parabola abbia coordinate V(0, 1).

In tal caso la parabola ha equazione $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Un punto dell'asse *x*, direttrice della parabola, ha coordinate generiche P(*k*, 0).
Calcoliamo le tangenti per P alla parabola data.
Retta generica per P:

$$y = m(x - k)$$

Determinazione delle tangenti:

$$\begin{cases} y = m(x-k) \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases}$$

Equazione risolvente: $4m(x-k) = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4m(x-k) + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 4(1+mk) = 0$

Condizione di tangenza: $\frac{\Delta}{4} = 4m^2 - 4(1+mk) = 4\left[m^2 - mk - 1\right] = 0 \Leftrightarrow m^2 - mk - 1 = 0$

$$\Delta = k^2 + 4 > 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2} = \begin{cases} \nearrow \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2} \\ \searrow \frac{k - \sqrt{k^2+4}}{2} \end{cases}$$

Le tangenti sono tra loro perpendicolari se e solo se $m_1 m_2 = -1$; verifichiamolo:

$$\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \cdot \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} = \frac{k^2 - \left(k^2+4\right)}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Pertanto le tangenti alla parabola passanti per un punto della sua direttrice sono perpendicolari tra loro.

PROBLEMA 2

Avvengono 3 urti distinti, tutti perfettamente elastici; in ciascun urto si conservano la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale del sistema.

<u>1° URTO:</u> (TRA LE DUE BIGLIE)

$$\begin{cases} 2mv_{1i} = 2mv_{1f} + mv_{2f} \\ \frac{1}{2}2mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}2mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \end{cases}$$

Semplificando e sostituendo i dati del problema, si ottiene:

$$\begin{cases} 18 = 2v_{1f} + v_{2f} \\ 162 = 2v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{cases}$$

Applichiamo, per praticità, la sostituzione: $v_{1f} = x$ e $v_{2f} = y$; il sistema diviene:

$$\begin{cases} y = 18 - 2x \\ 162 = 2x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 2x \\ 162 = 2x^2 + \left(18 - 2x\right)^2 \end{cases}$$

Equazione risolvente:

$$162 = 2x^2 + 324 - 72x + 4x^2 \Leftrightarrow 6x^2 - 72x + 162 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 27 = 9 \Rightarrow x = 6 \pm 3 = \begin{matrix} \nearrow 9 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

- La soluzione $x = 9$ porta a $y = 0$, corrispondente alla situazione *prima* dell'urto; pertanto viene scartata.
- Si sceglie, quindi, $x = 3$ da cui $y = 12$.

Dopo il primo urto: $v_1 = 3\frac{m}{s}$ e $v_2 = 12\frac{m}{s}$

<u>2° URTO:</u> (TRA LA BIGLIA DI MASSA m E LA PARETE)
Durante l'urto la parete rimane ferma e la biglia inverte la propria velocità.
Dopo il secondo urto: $v_1 = 3\frac{m}{s}$ e $v_2 = -12\frac{m}{s}$

<u>3° URTO:</u> (TRA LE DUE BIGLIE)

$$\begin{cases} 2mv_{1i} + mv_{2i} = 2mv_{1f} + mv_{2f} \\ \frac{1}{2}2mv_{1i}^2 + \frac{1}{2}mv_{2i}^2 = \frac{1}{2}2mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \end{cases}$$

Sostituendo i dati precedenti, ponendo nuovamente $v_{1f} = x$ e $v_{2f} = y$ e semplificando si ottiene:

$$\begin{cases} -6 = 2x + y \\ 162 = 2x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 2x \\ 162 = 2x^2 + y^2 \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente

$$2x^2 + 4x^2 + 24x + 36 - 162 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 24x - 126 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 21 = 25 \Rightarrow x = -2 \pm 5 = \begin{matrix} \nearrow -7 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

- La soluzione $x = 3$ porta a $y = -12$, corrispondente alla situazione *prima* dell'ultimo urto; pertanto viene scartata.
- Si sceglie, quindi, $x = -7$ da cui $y = 8$.

Le velocità finali valgono, quindi: $v_1 = -7\frac{m}{s}$ e $v_2 = 8\frac{m}{s}$