CORREZIONE TEMA DI CONCORSO - BORSA DI STUDIO RICCARDO ROSSI

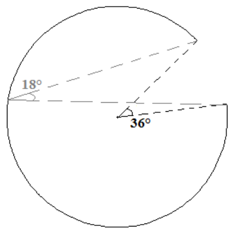
Risposte ai primi 20 quesiti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	C	B	A	C	E	D	A	C	B	D	B	D	A	A	D	E	B	119	50

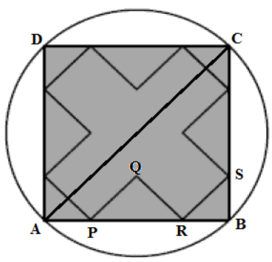
Motivazione risposte[1]

Quesiti di matematica:

7. Detta x la quantità (in gr.) di carne mangiata da Kevin 2 giorni fa, ieri ne ha mangiata $x + \frac{40}{100}x$, cioè $\frac{140}{100}x = \frac{7}{5}x$. In modo analogo, oggi ne mangia $\frac{7}{5}\left(\frac{7}{5}x\right) = 11700$ gr. Risolvendo, quindi, l'equazione $\frac{49}{25}x = 11700$ ed approssimando il risultato all'intero più vicino, come richiesto, si ottiene x = 5969 gr.
8. Un arco di circonferenza della lunghezza di 16π m corrisponde ad un angolo al centro di $\frac{\pi}{5}$ rad, ossia 36°. D'altra parte, un qualsiasi angolo alla circonferenza che insista sullo stesso arco è metà del corrispondente angolo al centro. Pertanto ogni catapulta riesce a tenere sotto tiro il varco aperto dagli spartani sotto un angolo costante, pari a 18°.



9. Consideriamo la clausola ricorsiva: $f(n+2) = f(n+1) + n$ e riscriviamola in forma equivalente: $f(n+2) - f(n+1) = n$.
Otteniamo le seguenti uguaglianze:
$$f(n+1) - f(n) = n - 1$$
$$f(n) - f(n-1) = n - 2$$
$$\dots$$
$$f(3) - f(2) = 1$$
Sommando membro a membro si ricava facilmente:
$$f(n+2) - f(2) = n + (n-1) + \ (n-2) + \ \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$
Pertanto $f(102) = f(2) + \frac{100 \cdot 101}{2} = 2 + 5050 = 5052$.
10. Applicando le proprietà commutativa ed associativa della somma, riorganizziamo i termini come segue:
log tg 1° + log tg 2° + log tg 3° + ... + log tg 87° + log tg 88° + log tg 89° =
= (log tg 1° + log tg 89°) + (log tg 2° + log tg 88°) + ... + (log tg 44° + log tg 46°) + log tg 45°=
= log (tg 1° tg 89°) + log (tg 2° tg 88°) + ... + log (tg 44° tg 46°) + log tg 45°=
Osserviamo che tg $(90° - \alpha)$ = cotg $\alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$ e quindi:
tg 1° tg 89° = tg 2° tg 88° = tg 3° tg 87° = tg 44° tg 46° = 1
inoltre tg 45° = 1; ne risulta:
= log 1 + log 1 + log 1 + ...+ log 1 = 0 + 0 + 0 + ... + 0 = 0
11. Dal momento che il rapporto tra i volumi delle due sfere è 27, detto R il raggio della maggiore e r quello della minore, risulta: $R = 3r$. Pertanto, il rapporto tra le superficie vale 9; essendo 3 m^2 la superficie della più piccola, quella della più grande vale 27 m^2.
12. Il perimetro della croce misura 30 cm. Per calcolarlo consideriamo il disegno a fianco. Posto AP = x risulta PQ = $\sqrt{2}x$ e quindi PR = $\sqrt{2}$ PQ = $2x$. Di conseguenza AB = AP + PR + RB = $4x$. Essendo AC = 10 cm risulta AB = $\frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ cm; pertanto $4x = 5\sqrt{2}$ e quindi $x = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.
Allora PQ = $\frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{2} = \frac{5}{2}$ ed, essendo il perimetro della croce pari a 12 PQ, risulta pari a 30 cm.



[1] Quanto alle motivazioni delle risposte di Scienze Naturali, si rimanda ai testi in adozione.

Quesiti di fisica:

13. Tenendo conto della riflessione, la luce deve compiere il doppio della distanza esistente tra il fotografo e lo specchio; la messa a fuoco sarà quindi effettuata a 4 m.
14. Risulta $F = k\,\Delta l$; essendo Δl = 70 – 50 = 20 mm = $2 \cdot 10^{-2}$ m, si avrà F = $400 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$ = 8 N
15. Il dinamometro legge il peso del blocchetto metallico, una volta immerso nel liquido. Tale peso è condizionato dalla Forza di Archimede, che spinge verso l'alto il blocchetto, riducendone il peso reale secondo la relazione $F = P - F_A$. Poiché la forza di Archimede dipende dalla densità del liquido, ma non dalla profondità di immersione nel becker, la risposta corretta è la (A).
16. L'oggetto si ferma istantaneamente quando $v(t)$ = 0 m/s; essendo $v(t) = 15 - 10\,t$, la salita termina quando t = 1,5 s. Il tempo di caduta è uguale al tempo di salita; in totale, il corpo ritorna al punto di partenza in 3 s.
17. La tensione del filo equilibra l'azione delle due forze (F e P); scomponendo lungo il sistema di riferimento in figura si ottiene:
$$T_x = T\,sen\,\vartheta = F$$
$$T_y = T\,cos\,\vartheta = P$$
Dividendo membro a membro si ottiene, quindi, tg $\theta = \frac{F}{P}$.
18. Se le masse sono uguali e le velocità hanno lo stesso modulo, le quantità di moto sono opposte, pertanto la quantità di moto del sistema è nulla. Inoltre, essendo l'urto elastico e centrale, si conserva l'energia cinetica totale del sistema, che vale mv^2. Pertanto la risposta esatta è la (B).

Quesiti numerici:

19. Osserviamo che:
$\boxed{\mathbf{11}} \to 2 \to \boxed{\mathbf{14}} \to 5 \to \boxed{\mathbf{35}} \to 8 \to \boxed{\mathbf{56}} \to 11 \to \boxed{\mathbf{77}} \to 14 \to \boxed{\mathbf{98}} \to 17 \to \boxed{\mathbf{119}} \to 11 \to \boxed{\mathbf{77}} \to ...$
Si può notare che, dopo i primi 4 passi, si trova un "ciclo" di lunghezza 3; dovendo calcolare il 37° termine della sequenza, possiamo basarci su quanto osservato e concludere che il 37° termine della sequenza assoluta è il 33° a partire dal $\boxed{\mathbf{56}}$. Si vede facilmente che tale numero è $\boxed{\mathbf{119}}$.

20. Il quesito riguarda un urto anelastico tra un proiettile ed un barattolo; durante l'urto il barattolo viene forato e, successivamente, il proiettile continua il suo modo.
Applichiamo la conservazione della quantità di moto.
Prima dell'urto la quantità di moto totale vale $Q_i = m_2\,v_2$ = 1,5 kg m/s; dopo l'urto la quantità di moto totale vale $Q_f = m_1\,v_1 + m_2\,v = (1 + m_2\,v)$ kg m/s.
Si ottiene quindi l'equazione:
$$1 + m_2\,v = 1{,}5$$
da cui
$$10^{-2}\,v = 0{,}5$$
cioè
$$v = 0{,}5 \cdot 100 = 50 \text{ m/s}$$

Problema MATEMATICA

L'equazione $x^2 + y^2 – 2010x – 2010y + 2xy = 2011$ può facilmente essere riscritta nella forma

$$x^2 + 2xy + y^2 – 2010x – 2010y – 2011 = 0,$$

cioè

$$(x + y)^2 – 2010\,(x + y) – 2011 = 0$$

che, con la sostituzione $t = x + y$, si riduce a:

$$t^2 – 2010\,t – 2011 = 0$$

Calcoliamone le soluzioni:

$$\Delta = 2010^2 – 4(– 2011) = (2011 – 1)^2 + 4044 = 2011^2 – 2022 + 1 + 4044 = 2011^2 + 2022 + 1 =$$
$$= (2011 + 1)^2 = 2012^2$$

Pertanto

$$t_{1,2} = \frac{2010 \pm 2012}{2}$$

Ne risulta: $t_1 = – 1$ e $t_2 = 2011$.
Per la teoria della scomposizione dei trinomi di 2° grado, risulta:

$$t^2 – 2010\,t – 2011 =(t + 1)(t – 2011)$$

Possiamo dedurne che

$$x^2 + 2xy + y^2 – 2010x – 2010y – 2011 = (x + y + 1)(x + y – 2011)$$

La conica precedente è l'unione degli insiemi dei punti delle rette di equazione $x + y + 1 = 0$ e $x + y – 2011 = 0$.
Osservando la prima retta si nota che essa non è soddisfatta da alcuna coppia (x, y) di numeri interi positivi, poiché la somma di tre numeri positivi non si può annullare in alcun modo; d'altra parte l'insieme delle coppie ordinate (x, y) di numeri interi positivi che soddisfano l'equazione della seconda retta è un insieme certamente finito, sebbene contenga un gran numero di elementi.
Pertanto esiste solo un insieme finito di coppie ordinate (x, y) di numeri interi positivi che soddisfino l'equazione data. Determiniamo il numero dei suoi elementi.

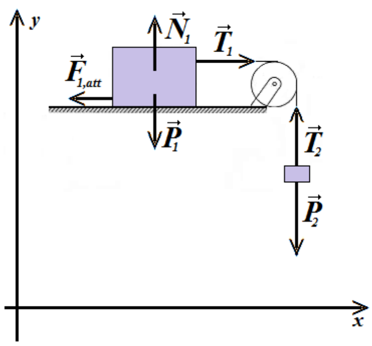
- se $x = 1$, allora $y = 2010$
- se $x = 2$, allora $y = 2009$
- se $x = 3$, allora $y = 2008$
- ...
- se $x = 2010$, allora $y = 1$

In tutto, quindi, avremo 2010 coppie ordinate di numeri interi positivi che realizzano l'uguaglianza

$$x^2 + y^2 – 2010x – 2010y + 2xy = 2011;$$

precisamente le coppie del tipo $(x, 2011 – x)$, per $x = 1, 2, ..., 2010$.

Problema FISICA



Consideriamo il disegno a fianco e scriviamo le equazioni dinamiche dei due corpi:

1) $\vec{F}_{1,att} + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$

2) $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$

Proiettando la prima equazione sull'asse x otteniamo:

1') $-F_{1,att} + T_1 = m_1 a_1$

mentre proiettando la seconda equazione sull'asse y si ottiene:

2') $T_2 - P_2 = - m_2 a_2$

Il filo è inestensibile, quindi risulta: $T_1 = T_2 = T$ ed inoltre $a_1 = a_2 = a$; ricordando, inoltre, che si ha

$$F_{1,att} = \mu N_1 = \mu m_1 g$$

possiamo scrivere il sistema dinamico come segue:

$$\begin{cases} -\mu m_1 g + T = m_1 a \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ricava

$$(m_2 - \mu m_1)g = (m_2 + m_1)a$$

da cui otteniamo

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{3 - 2.1}{3 + 7} 10 = 0.9 \frac{m}{s^2}$$

La tensione della fune vale quindi

$$T = m_2 (g - a) = 3(10 - 0.9) = 27{,}3 \text{ N}$$

Studiamo ora la seconda parte del problema. Le equazioni dell'equilibrio sono le seguenti:

3) $\vec{F}_{1,att} + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0}$

4) $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$

da cui, ragionando come prima, ricaviamo:

3') $-F_{1,att} + T = 0$ e 4') $T - P_2 = 0$

Pertanto:

$$\mu m_1 g = T = m_2 g$$

Semplificando si ottiene:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{7}$$

che si approssima a $\mu = 0{,}43$.